Matemática I

Integrais Impróprios

Engenharia de Telecomunicações e Informática

2021/2022

Teresa Araújo
Departamento de Matemática

Seja $[a, b]$ um intervalo limitado e fechado em $\mathbb{R}$, com $a < b$.
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Vamos ver o que acontece se o intervalo $[a, b]$ não for limitado.

Integrais com Limites Infinitos

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, +\infty[$.

Se existe e é finito $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe (ou converge) e o seu valor é dado por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

O integral diz-se **convergente**.

Caso o limite não exista ou seja infinito então o integral não existe e diz-se **divergente** ou que **diverge**.

Integrais com Limites Infinitos

Seja f uma função contínua no intervalo $]-\infty, b]$.

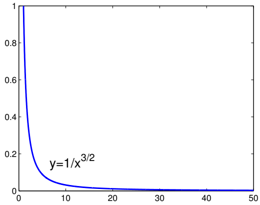
Se existe e é finito $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ então $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ existe (ou converge) e o seu valor é dado por

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

O integral diz-se **convergente**.

Caso o limite não exista ou seja infinito então o integral não existe e diz-se **divergente** ou que **diverge**.

Exemplo 1: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \underbrace{\int_1^{b} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx}_{=I}$$

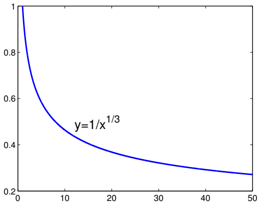
$$I = \int_1^b x^{-3/2}\,dx = \left[\frac{x^{-3/2+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_1^b = -2\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^b = -2\left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} -2\left(\frac{1}{\sqrt{b}} - 1\right) = -2\underbrace{\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{b}}}_{=0} + 2 = 2$$

O limite existe e é igual 2, logo o integral converge para 2.

Integrais com Limites Infinitos

Exemplo 2: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \underbrace{\int_1^{b} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx}_{=I}$$

$$I = \int_1^{b} x^{-1/3}\,dx = \left[\frac{x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_1^b = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{x^2}\right]_1^b = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{1^2}\right)$$

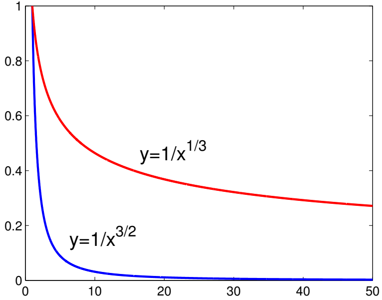
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[3]{b^2} - 1\right) = \frac{3}{2}\underbrace{\lim_{b\to+\infty}\sqrt[3]{b^2}}_{\to+\infty} - \frac{3}{2}$$

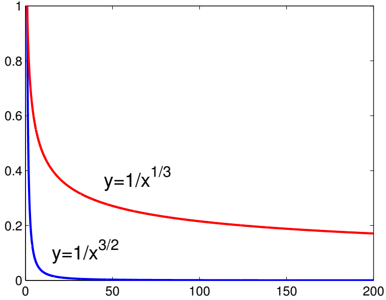
O limite não existe, logo o integral é divergente.

Integrais com Limites Infinitos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx = 2$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx \qquad \text{divergente}$$





Integrais com Limites Infinitos

Seja f uma função contínua no intervalo $]-\infty,+\infty[$.

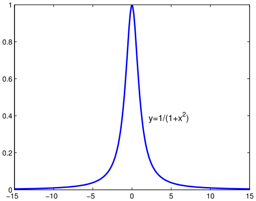
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

com $c \in \mathbb{R}$.

O integral é convergente se e só se existirem e forem finitos os dois integrais que figuram no segundo membro da relação.
Se pelo menos um desses limites não existir ou for infinito o integral não existe.

Integrais com Limites Infinitos

Exemplo 3: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Big[\operatorname{arctg}(x)\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \big(\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(0)\big) = \underbrace{\lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(b)}_{=\pi/2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

O integral converge para $\dfrac{\pi}{2}$.

Exemplo 3: (continuação)

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \Big[\text{arctg}(x)\Big]_a^0$$

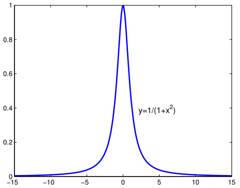
$$= \lim_{a\to-\infty} \big(0 - \text{arctg}(a)\big) = -\underbrace{\lim_{a\to-\infty} \text{arctg}(a)}_{=-\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

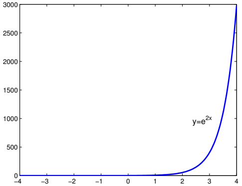
O integral existe e converge para π.

Integrais com Limites Infinitos

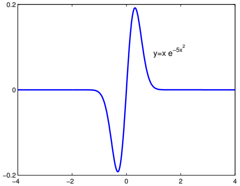
Exemplo 3: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$



Exemplo 4: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x}\, dx$ divergente



Exemplo 5: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-5x^2}\, dx = 0$



Integrais de Funções Descontínuas

Seja f uma função contínua no intervalo $]a, b]$.

Se existe e for finito $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$ então $\int_a^b f(x)\, dx$ existe (ou converge) e o seu valor é dado por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$$

Caso o limite não exista ou seja infinito então o integral não existe (ou diverge).

De modo análogo, se f é uma função contínua no intervalo $[a, b[$, temos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

Seja f uma função contínua em $]a, b[$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{c_1 \to a^+} \int_{c_1}^c f(x)\,dx + \lim_{c_2 \to b^-} \int_c^{c_2} f(x)\,dx\end{aligned}$$

O integral é convergente se e só se existirem e forem finitos os dois integrais que figuram no segundo membro da relação.

Se pelo menos um desses limites não existir ou for infinito o integral não existe.

Integrais de Funções Descontínuas

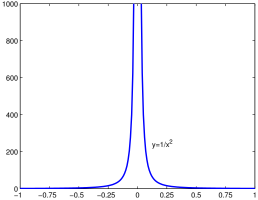
Seja f uma função contínua em $[a, c[\cup]c, b]$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\
&= \lim_{c_1 \to c^-} \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \lim_{c_2 \to c^+} \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

O integral é convergente se e só se existirem e forem finitos os dois integrais que figuram no segundo membro da relação.

Se pelo menos um desses limites não existir ou for infinito o integral não existe.

Exemplo 6: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$



$D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad c = 0$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} x^{-2}\, dx = \lim_{c\to 0^-} \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{-1}^{c}$$

$$= \lim_{c\to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{c} = \lim_{c\to 0^-} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{-1}\right) = -\underbrace{\lim_{c\to 0^-} \frac{1}{c}}_{\to\infty} - 1$$

O integral I_1 é divergente, logo $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$ também diverge.